۵.۲ لم ژوردان [۱]

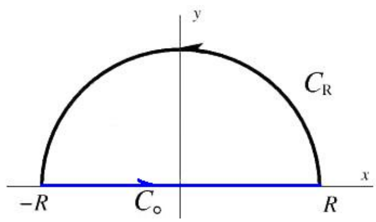
در آنالیز مختلط لم ژوردان [۲] برای محاسبه ی برخی انتگرال های ناسره به کار می رود. با این لم و استفاده از قضیه ی مانده ها می توان برخی انتگرالهای مختلط را محاسبه نمود. لم ژوردان در واقع مقدار انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx \tag{۱}$$

را بازای $a > 0$ مشخص می کند که تابع $f(z)$ در شرط

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \to 0 \tag{۲}$$

صدق می کند.



شکل ۱.۲: کنتور C_R

صورت لم. گیریم تابع پیوسته f بر مسیر نیمه مدور

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \le \theta \le \pi\} \tag{۳}$$

تعریف شده و در شرط (۲) صدق کند، آنگاه برای $a > 0$ داریم

$$\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz \to 0 \tag{۴}$$

بازای $R \to \infty$. این لم وقتی C_R در نیم صفحه ی پائینی واقع شده و $a < 0$ است نیز برقرار می باشد.

اثبات لم. مطابق (۲)، برای هر $\varepsilon > 0$ به قدر کافی کوچک، Rی بزرگ هست که $|f(Re^{i\theta})| < \varepsilon$. گیریم

$$I_R = \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz \tag{۵}$$

طبق تعریف انتگرال خط مختلط

$$I_R = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)}iRe^{i\theta}d\theta$$

[۱] Nosrati14000318U14000318ES140003181.
[۲] Jordan's Lemma

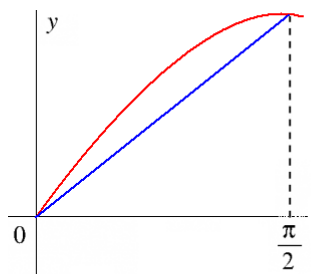
از $|\int f| \leqslant \int |f|$ داریم

$$|I_R| \leqslant \int_{۰}^{\pi} |f(Re^{i\theta})| e^{-aR\sin\theta} R d\theta \leqslant ۲\varepsilon R \int_{۰}^{\pi/۲} e^{-aR\sin\theta} d\theta$$

که از تقارن $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$ کمک گرفتیم. اکنون چون نمودار $y=\sin\theta$ در بازه ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ مقعر است پس بالای پاره خط واصل $\Big|_{۰}^{۰}$ تا $\Big|_{۱}^{\pi/۲}$ می افتد و در نتیجه $\sin\theta \geqslant \frac{۲\theta}{\pi}$ است و داریم:

$$\begin{aligned} |I_R| &\leqslant ۲\varepsilon R \int_{۰}^{\pi/۲} e^{-aR\frac{۲\theta}{\pi}} d\theta \\ &= ۲\varepsilon R \frac{-\pi}{۲aR} e^{-\frac{۲aR}{\pi}\theta}\Big|_{۰}^{\pi/۲} \\ &= \frac{\pi}{a}\varepsilon\left(۱-e^{-aR}\right) \\ &\leqslant \frac{\pi}{a}\varepsilon \end{aligned}$$

و برهان تمام است.



شکل ۲.۲: نمودار $y=\sin\theta$ در بازه ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$.

۶.۲ نتیجه

۶.۲. نتیجه

لم ژوردان در واقع کران بالائی را برای انتگرال کنتوری (۱) معرفی می کند:

$$|I_R| \leqslant \frac{\pi}{a} M \tag{۶}$$

که

$$M = \max_{|z|\to\infty} |f(z)| \tag{۷}$$

است. تساوی در (۶) وقتی برقرار می شود که f روی C_R صفر شود که طرفین بداهتا صفر خواهند شد.

۷.۲ به‌کارگیری لم ژوردان در محاسبه‌ی انتگرالها

۷.۲. به کارگیری لم ژوردان در محاسبه ی انتگرالها

از این لم معمولاً برای محاسبه ی انتگرال توابعی به شکل $f(z)e^{iaz}$ در طول محور طولها که در آنها تابع f در نیم صفحه ی فوقانی هولومورفیک بوده و روی نیم صفحه ی فوقانی بسته، بجز احتمالاً در تعداد متناهی از نقاط غیرحقیقی z_1، z_2، $\cdots$ و z_n پیوسته است، به کار می گیریم. برای اینکار کنتور C را متشکل از مسیرهای C_R و C_0 مانند شکل ۱.۲ در نظر می گیریم. طبق تعریف داریم:

$$\oint_C f(z)e^{iaz}dz = \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz + \int_{C_0} f(z)e^{iaz}dz \qquad (6)$$

مسیر C_0 روی محور حقیقی است و می توانیم انتگرال دوم سمت راست را چنین بنویسیم:

$$\int_{C_0} f(z)e^{iaz}dz = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}dx \qquad (7)$$

اگر f در (۴) صدق می کند پس طبق لم ژوردان

$$\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0$$

برای طرف چپ (۶) می توان از قضیه ی مانده ها استفاده کرده و به شرط

$$R > \max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|\}$$

بنویسیم

$$\oint_C f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \sum_{m=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_m}\{f(z)e^{iaz}\}$$

که $\mathrm{Res}_{z=z_m}\{f(z)e^{iaz}\}$ مانده ی تابع $f(z)e^{iaz}$ در تکینگی $z = z_m$ است $(1 \leqslant m \leqslant n)$. در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{m=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=z_m}\{f(z)e^{iaz}\}$$

برای مثال

$$\frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

روی $\mathbb{C} - \{\pm i\}$ هولومورفیک بوده و از آنجا که

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| &= \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{1+z^2}\right| \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{|1+R^2e^{2i\theta}|} \\
&\leqslant \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^2-1} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

در شرط لم صدق کرده و چون $z=i$ تنها تکینه تابع در نیم صفحه ی فوقانی است بنابر لم داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{۱+x^{۲}}dx = ۲\pi i\,\mathrm{Res}_{z=i}\{\frac{e^{iz}}{۱+z^{۲}}\} = ۲\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{i+z} = ۲\pi i\frac{e^{-۱}}{۲i} = \frac{\pi}{e}$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{۱+x^{۲}}dx = \frac{\pi}{e}$$

و

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{۱+x^{۲}}dx = \frac{\pi}{e}} \qquad (۱.۲)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{۱+x^{۲}}dx = ۰} \qquad (۲.۲)$$

اگر بخواهیم انتگرال

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{۳}\sin ۲x}{x^{۴}+۴}dx$$

را ارزیابی کنیم لازم است تا

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{۳}e^{۲x}}{x^{۴}+۴}dx$$

را ارزیابی نمائیم. با همان کنتور قبلی و برای R-های بزرگ، داریم

$$\left|\frac{z^{۳}}{z^{۴}+۴}\right| = \left|\frac{R^{۳}e^{۳i\theta}}{R^{۴}e^{۴i\theta}+۴}\right| < \frac{R^{۳}}{R^{۴}-۴} \to ۰$$

یعنی

$$\int_{C_R}\frac{z^{۳}e^{۲z}}{z^{۴}+۴}dz \to ۰$$

از طرفی $\frac{z^{۳}e^{۲z}}{z^{۴}+۴}$ دارای قطبهای ساده ی $\pm ۱ \pm i$ است که تنها قطبهای $\pm ۱ + i$ در نیم صفحه ی فوقانی قرار می گیرند پس

$$\int_{C}\frac{z^{۳}e^{۲z}}{z^{۴}+۴}dz = ۲\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=۱+i}\{\frac{z^{۳}e^{۲z}}{z^{۴}+۴}\} + \mathrm{Res}_{z=-۱+i}\{\frac{z^{۳}e^{۲z}}{z^{۴}+۴}\}\right)$$

با هوپیتال داریم

$$\mathrm{Res}_{z=۱+i}\{\frac{z^۳e^{۲z}}{z^۴+۴}\} = \lim_{z\to ۱+i}(z-۱-i)\frac{z^۳e^{۲z}}{z^۴+۴} = \lim_{z\to ۱+i}\frac{z^۳(z-۱-i)}{z^۴+۴}\lim_{z\to ۱+i}e^{۲z} = \frac{e^{۲i}}{۴e^۲}$$

$$\mathrm{Res}_{z=-۱+i}\{\frac{z^۳e^{۲z}}{z^۴+۴}\} = \lim_{z\to -۱+i}(z+۱-i)\frac{z^۳e^{۲z}}{z^۴+۴} = \lim_{z\to -۱+i}\frac{z^۳(z+۱-i)}{z^۴+۴}\lim_{z\to -۱+i}e^{۲z} = \frac{e^{-۲i}}{۴e^۲}$$

بنابراین

$$\int_C \frac{z^۳e^{۲z}}{z^۴+۴}dz = ۲\pi i\left(\frac{e^{۲i}}{۴e^۲}+\frac{e^{-۲i}}{۴e^۲}\right) = \frac{i\pi}{e^۲}\cos ۲$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^۳e^{۲x}}{x^۴+۴}dx = \int_{-\infty}^{\circ}\frac{x^۳e^{۲x}}{x^۴+۴}dx + \int_{\circ}^{\infty}\frac{x^۳e^{۲x}}{x^۴+۴}dx = ۲i\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^۳\sin ۲x}{x^۴+۴}dx = \frac{i\pi}{e^۲}\cos ۲$$

یا

$$\boxed{\int_{\circ}^{\infty}\frac{x^۳\sin ۲x}{x^۴+۴}dx = \frac{\pi}{۲e^۲}\cos ۲} \qquad (۳.۲)$$